代数学研究

矫雨承

2025 年 11 月 28 日

序

代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程的数学分支，也是数学中最重要的、基础的分支之一。按照抽象程度来分，可分为初等代数学和抽象代数学两部分。初等代数是对算数学的抽象和推广例如算数学中有

$$
\begin{gathered}
1+3=3+1 \\
7+15=15+7 \\
15693+2309=2309+15693
\end{gathered}
$$

其在初等代数中被抽象为

$$a+b=b+a$$

初等代数主要研究复数域的代数性质。但是，在初等代数中没有对0、1、+等基本概念给出严谨的定义。这部分内容通常在集合论中进行讨论，在集合论中$1=\{\varnothing\}$，但1实质上是对1个苹果，1个石子...的共同抽象，这种定义使得1过于狭隘，缺少广泛性和抽象性

抽象代数是对初等代数学的进一步抽象和推广。抽代将运算的定义进行推广，定义出一般集合上的代数运算。但是，抽象代数在证明过程中用到了很多复数域的代数性质，使得抽象代数仍建立在初等代数不严谨的基础上，导致其严谨化困难

本篇研究创造性地利用无限循环群定义整数集，从而定义有理数域、实数域、复数域，并通过关系依次定义映射、运算、代数系统等概念，即保留了抽象代数的广泛性，又有集合论的严谨性。同时，本文还将高等代数、分析学、数论等其他数学分支重新建立在抽象代数的基础上，为后续研究提供了坚实的理论基础

本篇研究所用到的前置理论只有集合论，并且用到都是一般性质，这使得本篇研究可以建立在朴素集合论、ZFC等一系列公理集合论上。

目录

第一章　从集合论到代数学

1.1　关系

定义 1.1.1. 设集合$\mathbf{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$则称$\mathbf{R}$是$\mathbf{A}$到$\mathbf{B}$的一个关系。
设$a \in \mathbf{A} \quad b \in \mathbf{B}$若$(a, b) \in \mathbf{R}$则记为$a\mathbf{R}b$

定理 1.1.2. 设$\mathbf{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{S} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$有

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbf{A} \quad b \in \mathbf{B} : a\mathbf{R}b \Leftrightarrow a\mathbf{S}b)$$

证明：
$(\forall a \in \mathbf{A} \quad b \in \mathbf{B} : a\mathbf{R}b \Leftrightarrow a\mathbf{S}b) \Leftrightarrow (\forall (a, b) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} : (a, b) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (a, b) \in \mathbf{S})$
又由$\mathbf{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{S} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$
故$(\forall (a, b) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} : (a, b) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (a, b) \in \mathbf{S}) \Leftrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{S}$
综上$\mathbf{R} = \mathbf{S} \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbf{A} \quad b \in \mathbf{B} : a\mathbf{R}b \Leftrightarrow a\mathbf{S}b)$

定义 1.1.3. 设$\mathbf{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$记$\mathbf{R}^{-1} = \{(b, a) \in \mathbf{B} \times \mathbf{A} : a\mathbf{R}b\} \subset \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

定理 1.1.4. 设$\mathbf{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{B}$有$(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$

证明:
$\forall a \in \mathbf{A} \quad b \in \mathbf{B}$:由定义1.1.3有$a\mathbf{R}b \Leftrightarrow b\mathbf{R}^{-1}a$故$a(\mathbf{R}^{-1})^{-1}b \Leftrightarrow b\mathbf{R}^{-1}a \Leftrightarrow a\mathbf{R}b$
由定理一有$(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$

第二章　群.环.体.域.模

第三章　数域构造

3.1　整数集

定义 3.1.1. 任一无限循环群称为整数集,记为$\mathbb{Z}$
其单位元记为0,生成元记为1;设$a \in \mathbb{Z}$,记$-a$为a的逆元
若代数运算$\times : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$满足$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$1 \times a = a$$
$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

则称$\times : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}$上的乘法

定理 3.1.2. 设整数集$\mathbb{Z}$有$\forall a \in \mathbb{Z} : a \times 1 = a$

证明:
显然$1 \times 1 = 1$不妨设$a_0 \times 1 = a_0$有$(a_0 + 1) \times 1 = a_0 \times 1 + 1 \times 1 = a_0 + 1$
$(a_0 + (-1)) \times 1 = a_0 \times 1 + (-1) \times 1 = a_0 1$